Université des Sciences et Technologies de LILLE

THÈSE

Spécialité

GÉNIE ÉLECTRIQUE

Présentée par

Georges MARQUES

En vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Université des Sciences et Technologies de LILLE

Contribution à l'Estimation de l'Erreur Numérique en 3D : Application aux Problèmes d'Électromagnétisme Statique

Soutenance prévue le 11 décembre 2000
devant le Jury composé de

Monsieur	Frédéric BOUILLAULT	Rapporteur
Monsieur	Gérard VINSARD	Rapporteur
Monsieur	Stéphane CLÉNET	Examinateur
Monsieur	Gérard MEUNIER	Examinateur
Monsieur	Alain NICOLAS	Examinateur
Monsieur	Francis PIRIOU	Examinateur

Résumé

La simulation d'un modèle physique s'effectue souvent à l'aide d'une méthode numérique. En électromagnétisme statique, la méthode des Éléments finis permet de décrire localement, les champs électriques et/ou magnétiques. Son emploi nécessite la discrétisation du domaine d'étude sous forme de maillage. Cette discrétisation induit des erreurs numériques puisqu'elle conduit à une solution approchée du modèle mathématique..

Suite à la thèse de F. MARMIN en 2D, ce travail se propose d'évaluer, en 3D, les erreurs numériques, à l'aide du ligurien qui mesure les distances entre les solutions approchée et exacte, par l'emploi d'un couple de champs admissibles. Cette étude est décomposée en trois parties.

Premièrement, après une brève description des équations différentielles à résoudre, la description de la discrétisation du problème initial, par les éléments de WITHNEY, est présentée. Puis, dans une deuxième partie nous présentons les deux types d'estimateurs d'erreurs utilisés : ceux basés sur une construction locale des champs admissibles (estimateurs initialement introduits en mécanique par P. LADEVÈZE) et ceux basés sur une construction plus « globales » (construction de graphes, minimisation entre grandeurs, simplification de la loi de comportement). Enfin, la dernière partie traite des problèmes évolutifs, et notamment ceux liés à l'estimation d'erreur en vue d'un remaillage du domaine d'étude. Pour cela, nous nous intéressons d'abord, au cas d'un transformateur triphasé à vide : les sources sont variables dans le temps, et les cartes d'erreur associées également ; l'objectif devient alors de déterminer la meilleure carte d'erreur. Puis, le cas d'un problème couplé avec un circuit extérieur est traité. Dans ce dernier cas, les erreurs numériques sont à la fois produites par la discrétisation spatiale mais aussi temporelle.

Table des matières

Introduction générale

La description d'un problème physique est souvent réalisée à l'aide d'un modèle mathématique, c'est-à-dire sur la base d'une mise en équations. Ce modèle résulte d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Dans le cas de problèmes électromagnétiques, on utilise les équations de MAXWELL associées à des lois de comportement. Ces dernières permettent de prendre en compte les caractéristiques physiques des matériaux. À ce niveau, on est amené à effectuer des hypothèses supplémentaires, pour obtenir un modèle mathématique exploitable. Ainsi, on supposera, par exemple, que la loi liant le champ magnétique à l'induction magnétique, ne dépend pas de la température ou de efforts mécaniques (contraintes). On pourra même aller plus loin, en négligeant le phénomène d'hystérésis. Pour faciliter la modélisation, on peut aussi être amené, à simplifier le domaine d'étude. L'ensemble des hypothèses effectuées conduisent donc, à un modèle perfectible, qui retranscrira plus ou moins bien les phénomènes que l'on cherche à décrire. À ce stade, des erreurs que l'on qualifiera d'erreur de modélisation apparaissent.

Une fois, le modèle mathématique obtenu, il faut être capable de l'exploiter, c'est-à-dire de calculer les différentes grandeurs physiques. En électromagnétisme, comme nous l'avons signalé précédemment, les équations de base décrivant les grandeurs électriques et magnétiques sont constituées par les équations de MAXWELL et des lois de comportement. La résolution directe de ce système, comprenant des équations différentielles, n'est généralement pas possible. On a recours à des méthodes numériques telle que la Méthode des Éléments Finis [12, 24, 43], pour appprocher au mieux la solution exacte du modèle mathématique. L'emploi de méthodes numériques suppose la discrétisation des grandeurs, c'est-à-dire une combinaison linéaire de fonctions connues. Ces fonctions peuvent être supportées, par exemple par un maillage. La solution de ce modèle constitue alors une approximation de la solution exacte (du modèle mathématique). À ce niveau, on voit apparaître des erreurs, que l'on qualifiera d'erreurs numériques.

Par conséquent, il convient d'évaluer la « qualité » numérique de la solution numérique par rapport à la solution exacte. Les estimateurs d'erreur numérique constituent une alternative à cette évaluation. Car, contrairement aux erreurs de modélisation, il existe des outils mathématiques qui permettent d'évaluer les erreurs numériques.

De nombreux travaux conduisant à différents types d'estimateurs ont déjà été publiés [1, 3, 4, 40, 43]. Parmi ces différentes familles d'estimateurs, dans le cas de l'électromagnétisme statique, ceux basés sur la non vérification de la loi de comportement permettent d'évaluer l'erreur commise par rapport à la solution exacte, qui nous le rappelons, demeure généralement inaccessible analytiquement. Cette approche a déjà été employée avec la méthode des éléments finis, en mécanique [21], et en magnétostatique 2D et 3D [23, 25, 32, 35, 39].

Les estimateurs d'erreur basés sur la non vérification de la loi de comportement, nécessitent l'obtention d'un couple de champs admissibles. Pour obtenir ce couple, on peut résoudre les deux problèmes complémentaires [23], ce qui conduit, surtout dans le cas de problèmes non linéaires, à des temps de calculs élevés. En 2D, une alternative a déjà, été proposée : elle permet, par constructions locales, de calculer, à partir d'une seule résolution par la méthode des éléments finis, un couple de champs admissibles [25, 35]. Les exemples traités ont montré que cette approche était intéressante.

Le travail présenté dans ce mémoire traite des problèmes d'électromagnétisme statique 3D linéaire ou non linéaire, pour les formulations en potentiels scalaire et vecteur. Notre étude sera décomposée en trois parties.

Dans une première partie, nous présenterons les équations de l'électromagnétisme dans le cas statique. Nous introduirons les potentiels, scalaire et vecteur afin de résoudre les équations de MAXWELL. La résolution analytique ne pouvant pratiquement jamais s'effectuer, nous présenterons alors le modèle numérique obtenu par la méthode des éléments finis. Nous introduirons les fonctions de discrétisation utilisées, les éléments de WHITNEY [7], qui sont bien adaptées à la description des grandeurs électromagnétiques.

Dans la deuxième partie, les estimateurs d'erreur seront, à proprement parlé, présentés. Dans un premier temps, la notion de champ admissible sera définie. Notamment, nous insisterons sur leurs propriétés remarquables. Ensuite nous proposerons différentes alternatives à la méthode basée sur la résolution des deux problèmes complémentaires, pour obtenir un couple de champs admissibles. Ce couple est nécessaire, on le rappelle, pour l'estimation d'erreur basée sur la non vérification de la loi de comportement. On étudiera ainsi, une extension en 3D de la méthode de calcul par constructions locales développée en 2D [25]. Puis, différentes constructions, que nous qualifierons de globales, car elles s'effectuent simultanément sur l'ensemble du domaine d'étude, seront proposées. Enfin, ces estimateurs seront validés et comparés en terme de précision sur deux exemples, dans les cas linéaire et non linéaire.

Finalement, dans la dernière partie, nous nous intéresserons plus particulièrement aux problèmes évolutifs. Tout d'abord, notre attention portera plus précisément au cas des systèmes multi sources. Nous mettrons en évidence les problèmes liés à l'amélioration de la discrétisation, lorsque l'on étudie un système possédant des sources variables. Différentes solutions seront étudiées. Afin d'illustrer cette étude, nous traiterons le cas d'un transformateur triphasé où les courants (ici les sources) évoluent en fonction du temps. Puis, nous nous pencherons sur les problèmes magnétostatiques couplés avec les équations de circuit. Le couplage circuit est pris en compte par l'intermédiaire d'une équation différentielle temporelle du premier ordre. Dans ce cas, il apparaît donc, non seulement des problèmes de discrétisation spatiale (maillage) mais également de discrétisation temporelle. Un estimateur d'erreur permettant de prendre en compte les erreurs de discrétisation spatiale et temporelle sera proposé. Nous l'appliquerons au cas d'un transformateur monophasé alimenté par une source de tension.

Conclusion générale

Dans cette étude, différents estimateurs basés sur la non vérification de la loi de comportement, ont été présentés dans le cas de l'électromagnétisme statique. Nous rappelons que ces estimateurs nécessitent l'obtention d'un couple de champs admissibles, c'est-à-dire vérifiant les deux équations différentielles du problème statique : dans le cas de la mégntostatique, un couple $(\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{H}})$ est admissible si ce couple vérifie la conservation du flux, le théorème d'AMPÈRE et les conditions aux limites.

Ces estimateurs diffèrent pour la méthode de calcul du couple de champs admissibles. Une première résolution éléments finis étant effectuée, on obtient alors un premier champ admissible. Le calcul du second champ (complémentaire) peut être obtenu de différentes manières.

Trivialement, on peut résoudre le second problème complémentaire par la méthode des éléments finis. Cette approche qualifiée de réference, bien que très précise, conduit néanmoins à des temps de calculs importants. Ainsi, comme alternative, nous avons étudié quatre méthodes de construction :

- une première basée sur des calculs locaux, constitue une extrapolation en 3D d'une méthode déjà étudiée en 2D. Nous avons montré que cette extension n'était pas immédiate en particulier dans le cas d'une formulation en potentiel vecteur. En effet, pour cette dernière, il est difficile, voire impossible de proposer des fonctions d'interpolations simples ;
- une deuxième basée sur une technique d'arbre. Cette approche simple à mettre en œuvre, s'est avérée trop imprécise ;
- une troisième utilisant les propriétés des éléments de WHITNEY, conduit à résoudre un second problème éléments finis, mais avec une matrice de masse unitaire (la métrique n'étant plus prise en compte) ;
- enfin, une quatrième basée sur un développement limité à l'ordre un, de la loi de comportement, aboutit à la résolution d'un problème éléments finis linéaire. Cette méthode est équivalente à la méthode de référence en linéaire, mais devient par contre, nettement plus rapide dans le cas non linéaire.

Après les avoir validées et comparées en terme de précision, l'estimateur basé sur un développement limité de la loi de comportement, semble être le plus intéressant. En effet, en non linéaire, cet estimateur conserve des performances proches de celles de l'estimateur de référence, i.e. basé sur deux résolutions éléments finis.

Sur la base de l'étude précédente, nous avons testé des estimateurs d'erreur dans le cas où les sources variaient dans le temps, dans le but d'améliorer la discrétisation. Ainsi, dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au cas où la distribution imposée des densités de courant, évoluaient dans le temps, avec comme exemple un transformateur triphasé. Si les sources évoluent au cours du temps, les champs électromagnétiques et par conséquent, les cartes d'erreur varient également. Or, pour remailler un domaine en vue d'améliorer la qualité de la discrétisation, il est nécessaire de disposer d'une carte d'erreur sur l'ensemble du domaine. Ainsi, le choix d'une carte d'erreur adéquate, devient problématique. Afin d'y répondre, trois techniques ont été comparées : parmi, celles-ci, nous avons pu constater que la méthode qui consistait à sommer l'ensemble des cartes d'erreur, permettait d'obtenir le meilleur rapport temps de calcul/précision.

Dans un second temps, nous avons étudié le cas du couplage avec le circuit extérieur d'un problème magnétostatique. On obtient alors un modèle mathématique comprenant, en plus des équations de MAXWELL et de la loi de comportement, une équation différentielle temporelle. La discrétisation d'un tel problème conduit donc à des erreurs dues au maillage mais également au pas de temps. Ainsi, nous avons proposé un estimateur d'erreur, qui intègre les deux types d'erreurs. L'efficacité de l'estimateur proposé a été mis en évidence avec l'exemple d'un transformateur triphasé. Nous avons mis en relief les limites intrinsèques des différentes discrétisations : le pas de temps (resp. la taille des éléments) peut tendre vers zéro, sans que l'erreur globale s'annule, mais tende vers une limite due à la discrétisation spatiale (resp. temporelle). Cet estimateur peut donc être employé pour, en particulier adapter au mieux le pas de temps et/ou le maillage, afin d'optimiser le critère temps de calculs/précision.

Les perspectives à donner à ce travail, sont nombreuses. Tout d'abord, l'estimateur basé sur un développement limité de la loi de comportement a été utilisé pour résoudre un problème sur l'ensemble du domaine. Cette résolution pourrait, a priori, s'effectuer sur une ou plusieurs parties du domaine, en imposant des conditions aux limites non homogènes à la frontière de ces sous-domaines. Le champ issu de la résolution par la méthode des éléments finis, étant relativement proche de la solution exacte, pourrait être utilisé pour imposer ces conditions aux limites. La résolution simultanée, en parallèle de plusieurs problèmes éléments finis, serait alors applicable, permettant ainsi de limiter grandement, les temps de calculs liés à l'estimation d'erreur.

Ensuite, nous avons proposé des solutions pour traiter les problèmes multi sources. Mais, une réflexion doit être menée pour tenter d'alléger ces méthodes, en utilisant au maximum les symétries spatiales de la structure ou temporelles des sources.

Enfin, nous avons proposé un estimateur spatio-temporel pour les problèmes magnétostatiques couplés circuit, dans la cas de la formulation en potentiel vecteur. Il serait intéressant d'effectuer alors une transposition au cas de la formulation en potentiel scalaire. On pourrait ainsi les comparer en terme de précision.

Bibliographie

[1] R. ALBANESE et R. FRESA. Upper and Lower Bounds for Local Electromagnetic Quantities. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 42 :499–515, 1998.

[2] R. ALBANESE et G. RUBINACCI. Magnetostatic Field Computations in Terms of Two Components Vector Potentials. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 29 :515–532, 1990.

[3] P. ALOTTO et I. PERUGIA. A Field-Based Finite Element Method for Magnetostatics Derived from an Error Minimization Approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 49 :573–598, 2000.

[4] I. BABUSKA et W.V. RHEINBOLDT. A Posteriori Error Estimator for the Finite Element Method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 12 :1597–1615, 1978.

[5] A. BOSSAVIT. WHITNEY Forms : a Class of Finite Elements for Three-Dimensionnal Computations in Electromagnetism. *IEE Proceedings Pt. A*, 135 :493–499, November 1988.

[6] A. BOSSAVIT. *Électromagnétisme, en vue de la Modélisation.* SPRINGER-VERLAG, PARIS, 1993.

[7] A. BOSSAVIT. *Computational Electromagnetism : Variational Formulations, Complementary, Edge Elements.* Academic Press Series in Electromagnetism, NEW-YORK, January 1998.

[8] A. BOSSAVIT, C. EMSON et I.D. MAYERGOYZ. *Méthodes Numériques en Électromagnétisme : Géométrie Di érentielle, Éléments Finis, Modèle d'Hystérésis.* EYROLLES, PARIS, 1991. C.E.A.-E.D.F., I.N.R.I.A. École d'Été d'Analyse Numérique, Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de FRANCE.

[9] S. BOUISSOU. *Comparaison des Formulations en Potentiel, pour la Résolution Numérique en 3D des Équations Mgnétiques couplées aux Équations du Circuit Électrique.* Thèse de doctorat, Université de PARIS VI, Juillet 1994.

[10] J. CROS, J.F. CHARPENTIER et P. VIAROUGE. Optimal Design of Power Inductors with Cylindrical Cores. In *ICEM'98*, pages 2221–2226, ISTANBUL, TURKEY, September 1998. ICEM'98.

[11] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques.* MASSON, PARIS, 1988. Collection Enseignement.

[12] G. DHATT et G. TOUZOT. *Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis*. MALOINE, PARIS, 1984.

[13] P. DULAR. *Modélisation du Champ Magnétique et des Courants Induits dans des Systèmes Tridimensionnels Non Linéaires*. Thèse de doctorat, Université de LIÈGE - Faculté des Sciences Appliquées, 1994.

[14] K. FORSMAN, T. TARHASAARI, A. KOSKI et L. KETTUNEN. Algorithm for Cuttings Topologically Non-Trivial Domains. In *CEFC'98*, page 113, TUCSON, U.S.A, June 1998. CEFC'98.

[15] G. FOURNET. *Électromagnétisme à partir des Équations Locales*. MASSON, PARIS, 1985.

[16] P.-L. GEORGE et H. BOROUCHAKI. *Triangulation de DELAUNAY et Maillage : Applications aux Éléments Finis*. HERMÈS, PARIS, 1997.

[17] C. GOLOVANOV. *Développement de Formulations Éléments Finis 3D en Potentiel Vecteur Magnétique : Application à la Simulation de Dispositifs Électromagnétiques en Mouvement*. Thèse de doctorat, Institut Nationnal Polytechniques de GRENOBLE, Octobre 1997.

[18] M. GONDRAN et M. MINOUX. *Graphes et Algorithmes*. EYROLLES, PARIS, 1985. Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricté de FRANCE.

[19] P. HAMMOND et T.D. TSIBOUKIS. Dual Finite Element Calculations for Static Electric and Magnetic Fields. *IEE Proceedings Pt. A*, 130 :105–111, 1983.

[20] A. HENRY-LABORDERE. *Cours de Recherche Opérationnelle : Tome 1*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, PARIS, 1995.

[21] P. LADEVÈZE et D. LEGUILLON. Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Applications. *SIAM*, 20 :485–509, June 1983.

[22] P.J. LEONARD, H.C. LAI, R.J. HILL COTTINGHAM et D. RODGER. Automatic Implementation of Cuts in Multiply Connected Magnetic Scalar Regions for 3D Eddy Current Models. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2) :1368–1371, March 1993.

[23] C. LI. *Modélisation 3D des Systèmes Électromagnétiques à l'aide des Formulations Duales et complémentaires. Application au Maillage Auto Adaptatif*. Thèse de doctorat, Université de PARIS VI, Décembre 1993.

[24] B. LUCQUIN et O. PIRONNEAU. *Introduction au Cacul Scientifique*. MASSON, PARIS, 1996. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise.

[25] F. MARMIN. *Contribution à l'Étude des Erreurs Numériques dues à la Méthode des Éléments Finis : Applications aux Problèmes Statiques d'Électromagnétisme 2D*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de LILLE, Mai 1998.

[26] F. MARMIN, S. CLÉNET, F. BOUILLAULT et F. PIRIOU. Calculation in Complementary Solutions in 2D Finite Element Method. Application to Error Estimation. *IEEE Transactions on Magnetics*, À paraître, 2000.

[27] F. MARMIN, S. CLÉNET, P. BUSSY et F. PIRIOU. Influence of Adaptive Meshing on Electromagnetic Torque Calculation. pages 472–473, MARSEILLE, FRANCE, May 1998. 4rd International Workshop on Electric and Magnetic Fields.

[28] A. MARROCCO. Analyse Numérique des Problèmes en Électrotechniques. *Ann. Sc. Math.*, 1 :271–296, 1977.

[29] Y. Le MÉNACH. *Contribution à la Modélisation Numérique Tridimensionnelle des Systèmes Électrotechniques : Prise en Compte des Inducteurs.* Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de LILLE, Février 1999.

[30] Y. Le MÉNACH, S. CLÉNET et F. PIRIOU. Determination and Utilization of the Source Field in 3D Magnetostatic Problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34 :2509–2515, 1998.

[31] G. NICOLAS, F. ARNOUX-GUISSE et O. BONNIN. Adaptive Meshing for 3D Finite Element Software. pages 1–10, VENEZIA, ITALY, OCTOBER 1995. Finite Elements in Fluids New Trends and Applications.

[32] J. PENMAN et M.D. GRIEVE. Self-Adaptive Mesh Generation Technique for the Finite-Element Method. *IEE Proceedings Pt. A*, 134 :634–650, September 1987.

[33] J.-P. PÉREZ, R. CARLES et R. FLECKINGER. *Électromagnétisme. Fondements et Applications.* MASSON, PARIS, 1997. Enseignement de la Physique.

[34] F. PIRIOU et A. RAZEK. Finite Element Analysis in Electromagnetic Systems Accounting for Electrical Circuit. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29 :1669–1675, 1993.

[35] J.-F. REMACLE. *Estimation d'Erreur dans la Modélisation par Éléments Finis des Champs Électromagnétiques : Application à l'Optimisation de Maillages.* Thèse de doctorat, Université de LIÈGE, 1997.

[36] Z. REN. Auto-Gauging of Vector Potential by Iterative Solver-Numerical Evidence. In *Third International Workshop on Electric and Magnetic Fields*, pages 119–124, BELGIUM, LIÈGE, May 1996.

[37] Z. REN. Contribution à la Modélisation des Systèmes Électromagnétiques Tridimensionnels. Étude des Formulations Duales. Modélisation des Systèmes Électromagnétique-Mécanique Couplés. Habilitation à Diriger des Recherches, Université de PARIS XI, Mars 1997.

[38] Z. REN et N. IDA. Derivation of Various Dual Formulations in Magnetostatics via Error Based Energy Approach. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35 :1167–1170, May 1999.

[39] J. RIKABI, C.F. BRYANT et E.M. FREEMAN. An Error Based Approach to Complementary Formulations of Static Fileds Solutions. *Int. Jour. Num. Met. in Eng.*, 26 :1963–1987, April 1988.

[40] J. RIKABI, C.F. BRYANT et E.M. FREEMAN. Error-Based Derivation of Complementary Formulations for the Eddy-Cureent Problem. *IEE Proceedings Pt. A*, 135 :208–216, April 1988.

[41] Y. TALPAERT. *Leçons et Applications de Géométrie Di érentielle et de Mécanique Analytique.* CEPADUES, TOULOUSE, 1993.

[42] J.P. WEBB et B. FORGHANI. Hierarchal Scalar and Vector Tetrahedra. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29 :1495–1498, March 1993.

[43] O.C. ZIENKIEWICZ et R.L. TAYLOR. *La Méthode des Eléments Finis : Formulation de Base et Problèmes Linéaires.* AFNOR, PARIS, 1991.